221. Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

Soient $n, p, m \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I / Systèmes différentiels linéaires

1] Définitions

Déf 1 : Equation différentielle
Une équa. diff. d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ est une équation de la forme :

$$Y^{(p)} = f(t, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)})$$

où f est une application continue déf. sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^p$, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

L'inconnue est Y, une appli. d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, p fois dérivable, et telle que $(t, Y(t), \dots, Y^{(p-1)}(t)) \in U$ pour tout $t \in J$.

Déf 2 : Equation différentielle linéaire (EDL)
L'équa. diff. est dite linéaire si :
$f(t, Y) = A_0(t) Y + \dots + A_{p-1}(t) Y^{(p-1)} + b(t)$
où les $A_i : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b : I \to \mathbb{K}^n$ sont des appli. continues.
On note (E) : $Y^{(p)} = A_0(t) Y + \dots + A_{p-1}(t) Y^{(p-1)} + b(t)$

Déf 3 : • Si $n = 1$, l'équation est dite scalaire
• si $n > 1$, on parle aussi de système d'équa. diff / système différentiel

Ex 4 :
- $y'' + \omega_0^2 \sin y = 0$ est un équa. diff. scalaire d'ordre 2, non linéaire (équation du pendule sans frottement)
- $y' = y + 3$ est une EDL scalaire d'ordre 1
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $Y' = Y$ est un système diff linéaire / une EDL d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$

Déf 5 : Si $b \equiv 0$, l'équa diff. est dite homogène
On note (E_H) l'équa. diff. homogène associée à (E)

Ex 6 : $y' = y$ est l'EDL homogène associée à $y' = y + 3$

Prop 7 : Une EDL d'ordre p sur $\mathbb{K}^n$ se ramène à une EDL d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^{np}$, en posant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ \vdots \\ Y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \vdots \\ \}n \end{matrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ & 0 & I_n & \\ & & \ddots & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \}n$$

$$(E) \iff X'(t) = A(t) X(t) + B(t)$$

Ex 8 : $y'' + \omega_0^2 y = 0 \iff \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$
(oscillateur harmonique à la pulsation ω_0)

$\Rightarrow$ Par la suite on considère donc des EDL d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^m$
(E) $Y'(t) = A(t) Y(t) + B(t)$

2] Solution au problème de Cauchy

Déf 9 : On appelle pb de Cauchy pour (E) en $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^m$, la recherche d'une solution Y de (E) qui vérifie de plus $Y(t_0) = Y_0$

Th 10 : Théorème de Cauchy-Lipschitz (linéaire) $\boxed{\text{DVP1}}$
Le pb de Cauchy admet une unique solution $Y, I \to \mathbb{K}^m$

Ex 11 : $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 2e^{3t}$ est l'unique solution au pb de Cauchy
$\begin{cases} y'(t) = 3y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Contre-ex 12 : Solution non globale dans le cas non linéaire
Dans le cas linéaire, la solution est définie sur I en entier : la solution est dite globale.
Dans le cas non linéaire : le pb de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = y^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(1) = 1 \end{cases}$
admet comme solution $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto -\frac{1}{t}$ et celle-ci ne peut se prolonger en une solution sur $\mathbb{R}$

Contre-ex 13 : Non unicité dans le cas non linéaire
$y_1 \equiv 0$ et $y_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t^2}{4}$ sont 2 sol du pb de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3] Espace des solutions

On note S l'ensemble des solutions de (E)
S_H ——— (E_H)

Th 14 : Structure de S_H
• S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^m)$
• Pour tout $t_0 \in I$, $\varphi_{t_0} : \begin{matrix} S_H \to \mathbb{K}^m \\ Y \mapsto Y(t_0) \end{matrix}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels)
• S_H est de dimension m

Ex 15 : Linéaire scalaire d'ordre 1 homogène
Soit $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si (E_H) : $y' = ay$, alors :
$S_H = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\alpha(t)})$ où α est une primitive de a

Contre-ex 16 : Attention aux équations non résolues !
L'équa diff. $t^2 y''(t) - 6t y'(t) + 12 y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, ne peut se mettre sous la forme $y''(t) = f(t, y, y')$ sur $\mathbb{R}$: on dit qu'elle est non résolue.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un ev de dim. 4.

Corollaire 17 : Structure de S
S est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^m)$ de direction S_H
$\Rightarrow$ Ainsi :
"sol. générale de (E) = sol. générale de (E_H) + sol. particulière de (E)"

Ex 18 : Les solutions de $y'(t) = 3y(t) + 1$, $t \in \mathbb{R}$
sont : $y(t) = \lambda e^{3t} - \frac{1}{3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prop 19 : Principe de superposition
Si Y_1 est solution de $Y' = AY + B_1$
—— Y_2 ——— $Y' = AY + B_2$
Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda Y_1 + \mu Y_2$ est sol. de $Y' = AY + \lambda B_1 + \mu B_2$

Appli 20 : Pour résoudre $y'(t) + y(t) = \mathrm{ch}\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$,
on peut résoudre $\begin{cases} y'(t) + y(t) = e^t \\ y'(t) + y(t) = e^{-t} \end{cases}$ puis "superposer" les solutions

Déf 21 : Wronskien
Soit B une base de $\mathbb{K}^m$, si $Y_1, \dots, Y_m$ sont m sol. de (E_H), on déf. leur Wronskien $W(t) = \det_B(Y_1(t), \dots, Y_m(t))$ (ne dépend pas de B)

Prop 22 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $Y_1, \dots, Y_m$ est une base de S_H
ii) $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$
iii) $\exists t_1 \in I$, $W(t_1) \neq 0$

Appli 23 : $y_0(t) = e^t$ et $y_1(t) = t e^t$ sont 2 sol. de :
$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ (E)
En écrivant (E) : $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y(t)$ et en posant $Y_i = \begin{pmatrix} y_i \\ y_i' \end{pmatrix}$, $i \in \{1, 2\}$
on a $W(0) = |Y_0(0) \;\; Y_1(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
Ainsi, (y_0, y_1) forme une base de S_H

II/ Résolution

1/ Systèmes homogènes

a Systèmes à coefficients constants : $Y'(t) = AY(t)$

On suppose connue la notion d'exponentielle de matrices et la réduction de Jordan

Prop 24 : - les sol. de (E_H) sont $Y(t) = e^{tA}C$, $C \in \mathbb{K}^m$
- si $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^m$ la sol. de (E_H) qui vérifie $Y(t_0) = Y_0$ est $Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0$

$\Rightarrow$ Ainsi on sait résoudre les systèmes homogènes à coeffs constants, à condition de savoir calculer e^{tA}. Une méthode est d'utiliser la forme de Jordan de A dans $M_m(\mathbb{C})$.

Prop 25 : Exponentielle d'un bloc de Jordan

si $J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$e^{tJ_r(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & t^2/2 \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Par un calcul par blocs et un changement de base, on en déduit e^{tA} pour $A \in M_m(\mathbb{C})$ quelconque.

Ex. 26 : Le cas $m = 2$

3 cas sont possibles selon la nature des valeurs propres de A

① A diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$; soient λ_1, λ_2 ses valeurs propres (éventuellement égales). Alors :

$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$

② A a une valeur propre réelle λ avec un seul vecteur propre associé à λ :

$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $e^{tA} = e^{\lambda t} P\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

③ A a 2 valeurs propres complexes non réelles $\alpha \pm i\beta$:

$A = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}$ donc $e^{tA} = e^{\alpha t} P\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} P^{-1}$

où dans chaque cas, P est une matrice de $GL_2(\mathbb{R})$

Appl. 27 : Le système $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ a pour solutions :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} + \mu \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ y(t) = \lambda \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} + \mu \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ex. 28 : Cas des équations d'ordre 2 scalaires

Soit (E) : $y'' + py' + qy'' = 0$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

On introduit le polynôme caractéristique de l'équation :
$P = X^2 + pX + q$

① Si P a 2 racines réelles distinctes λ_1, λ_2, les sol sont :
$y(t) = \lambda e^{\lambda_1 t} + \mu e^{\lambda_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

② Si P a une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$, les sol sont :
$y(t) = (\lambda + \mu t) e^{\lambda t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

③ Si P a 2 racines complexes non réelles $\alpha \pm i\beta$, les solutions sont :
$y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Appli. 29 : Circuit RLC

On considère un circuit résistance/bobine/condensateur en série, à $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

La charge q du condensateur est régie par l'EDL :

$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = E$ où (E, R, L, C) sont des constantes physiques

Alors on sait résoudre l'équation homogène :
- Si $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ on est dans le cas ① de Ex. 28
- si $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ on est dans le cas ②
- si $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ on est dans le cas ③

b Systèmes à coefficients variables

On ne sait pas résoudre $Y'(t) = A(t)Y(t)$ en général.

On peut par exemple :
- voir une solution évidente
- chercher une solution en série entière si les coeffs sont des polynômes ent.

Ex 30 : Équation de Bessel $ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$ (pendule simple dont la longueur du fil peut varier)

$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} t^n$ est une solution

Prop. 31 : EDL 2 scalaire $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$

si (φ, ψ) est une base de S_H, alors $W(t) = Ce^{P(t)}$, où P est une primitive de p, et $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ on peut utiliser ceci dans la situation où on connaît une solution φ de (E_H), pour trouver une autre solution ψ telle que (φ, ψ) forme une base de S_H

Ex 32 : $t^2y''(t) + (t + t^2)y'(t) - y(t) = 0$, $t > 0$ (E_H)

$\varphi(t) = \frac{1}{t}(e^{-t} + t - 1)$ est solution de (E_H).

Alors, on trouve que $\psi(t) = \frac{c}{t}(e^{-t} + t - 1)\int_1^t \frac{e^{-u}}{e^{-u} + u - 1}\,du$ est une autre solution, et $S_H = \mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$

2/ Recherche d'une solution particulière

a Méthode générale : variation des constantes

si $(Y_1, \dots, Y_m)$ base de S_H, alors on cherche une solution de (E) de la forme $Y_p(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) X_i(t)$, avec $\alpha_i \in C^1(I, \mathbb{K})$

Prop. 33 : Cette forme est solution ssi $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i'(t) X_i(t) = B(t)$

Ex. 34 : EDL d'ordre 2 scalaire $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = b(t)$

si on connaît (φ, ψ) une base de S_H, alors :
$t \mapsto \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$ est solution de (E) ssi

$$\begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = b(t) \end{cases}$$

Appli. 35 : (E) $y''(t) + y(t) = \tan^2(t)$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Une solution particulière est :

$y(t) = \left(-\cos t - \frac{1}{\cos t}\right)\cos t + \left(-\sin t + \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right]\right)\sin t$
$= -2 + \sin t \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right]$

Prop. 36 : Si A est constante, on a une formule générale pour les solution de (E). Si on impose $Y(t_0) = Y_0$, la sol est :

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds$$

Rq 37 : En pratique on ne retient pas la formule, on refait les calculs

B] Autres méthodes

Prop-38 : Résoudre $y''(t) + p\,y'(t) + q\,y(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ (E) où Q polynôme.

On note P le polynôme caractéristique de (E_H), Alors :

- si $P(\lambda) \neq 0$, on cherche une solution de la forme : $y(t) = T(t)\,e^{\lambda t}$ où T polynôme, $\deg T = \deg Q$
- si λ racine simple de P, ______ ; $y(t) = T(t)\,e^{\lambda t}$, $\deg T = \deg P + 1$
- si λ racine double de P, ______ ; $y(t) = T(t)\,e^{\lambda t}$, $\deg T = \deg P + 2$

Appli 39 : $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{-3t}$

$y(t) = -\frac{1}{4}\, t\, e^{-3t}$ est une solution particulière

III/ Etude qualitative

On s'intéresse au comportement des solutions.
On se restreint au cas A constante.

1] stabilité

Déf.40 : On dit que $u_0 \in \mathbb{R}^m$ est un point d'équilibre du système $Y'(t) = AY(t)$, si $Au_0 = 0$.
Un point d'équilibre est donc une solution constante de (E_H).

Notation : Pour $v \in \mathbb{R}^m$, on note Y_v la solution du pb de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(0) = v \end{cases}$, On choisit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$

Déf.41 : Soit u_0 un pt d'équilibre, On sq $u_0 = 0$ (quitte à faire un changement de variables). On dit que 0 est :
- stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|v\| \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|Y_v(t)\| \leq \varepsilon$
- asymptotiquement stable si 0 est stable et que de plus $\exists M > 0 / \|v\| \leq M \Rightarrow \|Y_v(t)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Voir annexe.

Th.42 : Soient $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq s}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$
- 0 est stable ssi $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $(\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0)$ ou $(\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ et le bloc de Jordan associé est diagonalisable)
- 0 est asymptotiquement stable ssi $\forall j \in [\![1, s]\!]$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$

De plus dans ce cas, il existe $\gamma > 0$, $M > 1$ tels que $\forall t \geq 0$, $|||e^{tA}||| \leq M\,e^{-\gamma t}$
où $|||\cdot|||$ désigne la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.

Ex.43 : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x \end{cases}$ (E). 0 est un pt d'équilibre instable de (E)

2] Allure des trajectoires

On traite le cas $m = 2$. On sq A est inversible de sorte que 0 est le seul point d'équilibre. L'allure des trajectoires dépend uniquement de la nature des valeurs propres de A

[1] A a 2 valeurs propres réelles $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 3 cas possibles

Ex 44 : on considère le système de Ex.43.
L'origine est un point selle

[2] A a une valeur propre réelle double λ, et A est diagonalisable

2 cas possibles

[3] A a une valeur propre réelle double et un seul vecteur propre associé à λ

2 cas possibles

[4] A a 2 valeurs propres complexes non réelles

3 cas possibles

Voir annexe.

Appli.45 : pendule simple au voisinage de 0

- Sans frottement : $y'' + \omega_0^2 \sin y = 0$

En approximant $\sin y \underset{y \to 0}{\sim} y$; $y'' + \omega_0^2 y = 0$

$\Rightarrow$ 0 est un centre

- Avec frottement : $y'' + p\,y' + \omega_0^2\, y = 0$ au voisinage de 0

Avec $0 < p < 2\omega_0$

$\Rightarrow$ 0 est un foyer stable

3] Linéarisation autour d'un point d'équilibre

On étudie (S) $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ un système non linéaire, f de classe C^1

On sq $f(0) = 0$: on dit que 0 est un pt d'équilibre de (S).

Déf.46 : Le système $Y'(t) = AY(t)$ où $A = df(0)$, est appelé système linéarisé de (S) autour du pt d'équilibre 0.

Ex.47 : Dans Appli.45 on a linéarisé l'équation autour de 0

Th.48 : Théorème de Liapounov $\boxed{\text{DVP2}}$

Si $A = df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système (S)

$\Rightarrow$ Autrement dit, au vu du Th.42, la propriété "0 est asymptotiquement stable" se transmet du système linéarisé au système (S).

Contre-ex 49 : Dans les autres cas on ne peut pas conclure !

Soit (S) $\begin{cases} x'(t) = \alpha x^3(t) \\ y'(t) = \beta y^3(t) \end{cases}$, $t \in [0, +\infty[$

$df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc 0 est stable pour le système linéarisé

Pourtant pour (S) :
- 0 est instable si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$
- 0 est asymptotiquement stable si α et $\beta < 0$

Rq 50 : les trajectoires des solutions de (S) ne ressemblent pas toujours à celles du système linéarisé

(S) $\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$

L'origine est un foyer stable pour (S) mais un centre pour le système linéarisé